

## **Modelos matemáticos aplicados a estudios con trazadores de la dinámica de aguas costeras de la ciudad de Montevideo, Uruguay**

### **Mathematical models applied to tracer studies of coastal water dynamics in Montevideo city, Uruguay**

*Roberto Suárez-Antola*

Ministerio de Industria, Energía y Minería  
Montevideo, Uruguay  
Omnia Sciences/ Technologies/ Services Ltd.  
[robertosua@gmail.com](mailto:robertosua@gmail.com)

Recibido: 07/03/2017

Aceptado: 28/04/2017

**Resumen:** Con el propósito de suministrar un marco de referencia adecuado para el desarrollo de los modelos matemáticos que son el objetivo principal de esta investigación, en la primera parte de este artículo, se resumen los trabajos de campo llevados a cabo en las aguas costeras del Río de la Plata en la región de Montevideo y en la Bahía de Montevideo, entre 1991 y 2001. Se comienza por los resultados de un estudio de la dinámica y renovación del agua en la bahía de Montevideo que involucró el empleo de trazadores radioactivos y fluorescentes para marcar el agua en el interior de la bahía. Durante ese estudio, la detección de una señal radioactividad artificial debida al tritio a 15 km al este de la boca de la bahía, condujo a conjeturar la existencia de un proceso de difusión de rompientes en la franja de aguas costeras adyacentes, situadas al este de dicha boca. Para distinguir entre los aportes del emisor sub-acuático de Punta Brava y los aportes de la bahía se realizaron estudios de la influencia de la bahía sobre las aguas costeras en simultáneo con un estudio de la dinámica de la pluma de descarga del emisor sub-acuático. Durante estos trabajos se descubrió un efecto de trampa significativo en la playa Pocitos. Se investigó este efecto empleando trazadores fluorescentes para simular un evento localizado de contaminación. A continuación se efectuó un estudio de dinámica de sedimentos en la bahía de Montevideo y en las aguas costeras adyacentes, empleando trazadores radioactivos. Además se obtuvo información relacionada con procesos de dragado empleando sondas de densidad. Se determinó la capacidad de autodepuración de las aguas costeras en la región de Punta Lobos, donde se ha previsto ubicar el segundo emisor sub-acuático de la ciudad de Montevideo, empleando un método de doble trazador.

En la segunda parte del artículo se revisan y discuten los modelos matemáticos (modelos analíticos) construidos y utilizados para diseñar y para interpretar los resultados de los trabajos de campo resumidos en la primera parte. Se comienza por los modelos de compartimentos construidos para una caracterización paramétrica de la cinética de renovación del agua en la bahía de Montevideo, incluyendo un modelo clásico de dos compartimentos y un modelo reciente de tres compartimentos basado en una cinética fractal. Se resumen los modelos matemáticos utilizados en los trabajos de campo en aguas costeras, ya sea con fines de pronóstico para protección radiológica y diseño de experimentos, ya sea con fines de diagnóstico para la caracterización paramétrica de los procesos de transporte a partir de los resultados experimentales. Se revisa el modelo matemático construido para la determinación del  $T_{90}$  en las aguas costeras vecinas a Punta Lobos.

**Palabras clave:** modelos matemáticos, trazadores, efecto de escala, cinética fractal, difusión anómala, capacidad de autodepuración.

**Abstract:** With the purpose of furnishing a suitable reference framework to develop the mathematical models that are the main objective of this research, the first part of the article summarizes the fieldwork carried out in the coastal waters of the Río de la Plata in the Montevideo region and in the Bay of Montevideo between 1991 and 2001. We begin with the results of a study of the dynamics and renewal of water in the bay of Montevideo that involved the use of radioactive and fluorescent tracers injected in the water inside the bay. During this study, the detection of artificial radioactivity due to tritium, 15 km east from the bay's mouth, led to the conclusion that there is a process of breakers diffusion in the strip of adjacent coastal waters located to the east of said mouth. In order to distinguish between the contributions of the Punta Brava sub-aquatic sewage outfall and the contributions of the contamination of the bay, studies of the influence of the bay on the coastal waters were carried out simultaneously with a study of the dynamics of the sewage outfall discharge plume. During these works a significant trap effect was discovered at Pocitos beach. This effect was investigated using fluorescent tracers to simulate a localized contamination event. A study of sediment dynamics was carried out in the Bay of Montevideo and adjacent coastal waters using radioactive tracers. In addition, information related to dredging processes was obtained using density probes. The self-purification capacity of the coastal waters in the Punta Lobos region (where it is planned to locate the second sub-aquatic emitter of the city of Montevideo) was determined using a double tracer method.

In the second part of the article we review and discuss the mathematical models (analytical models) constructed and used to design and interpret the results of the field work summarized in the first part. We start with the compartment models constructed for a parametric characterization of the water renewal kinetics in the Bay of Montevideo, including a classical two compartments model and a recent model three compartments model based on fractal kinetics. We summarize the mathematical models used field work in coastal waters, either for forecasting purposes (for radiological protection and design of experiments) or for diagnostic purposes (for parametric characterization of transport processes from experimental results). The mathematical model constructed for the determination of  $T_{90}$  in the coastal waters adjacent to Punta Lobos is reviewed.

**Key words:** mathematical models, tracers, scale effect, fractal kinetics, anomalous diffusion, self-purification capacity.

## **Introducción<sup>1</sup>**

Las aguas costeras cuyo estudio motiva el presente trabajo se encuentran ubicadas en la margen izquierda del Río de la Plata, en el inicio de su región externa. La marea, las descargas fluviales y los vientos presentan efectos variables sobre la dinámica del agua en el Río de la Plata en general y de las aguas costeras de Montevideo en particular, pero de un mismo orden de magnitud. Como consecuencia, tanto desde un punto de vista hidrológico como ambiental, las aguas costeras de Montevideo configuran un sistema complejo y cambiante que complica el control de la calidad del agua de las playas.

El relieve de Montevideo presenta ondulaciones, con algunas alturas suaves. Por ello está cruzado por numerosos y por lo general pequeños cursos de agua. Esta red hidrográfica tiene mucha importancia porque ha condicionado fuertemente el desarrollo del saneamiento y la disposición final de las aguas servidas de la ciudad. Con excepción de una franja costera de un ancho de unos 3 km, que vierte directamente hacia el Río de La Plata, el resto de la ciudad drena hacia tres arroyos. El Pantanoso, con 16 km de extensión total y una cuenca de 66.4 km<sup>2</sup> y el Miguelete, de 21,5 km de extensión y una cuenca de 113 km<sup>2</sup>, desaguan en la Bahía de Montevideo. El arroyo Carrasco, de 14 km de extensión y una cuenca de 213 km<sup>2</sup> recoge aguas de extensas áreas pobladas del este y noreste de Montevideo y las vuelca en el Río de La Plata.

Estos tres cursos de agua están contaminados y degradados por numerosas descargas de aguas servidas domésticas y residuales industriales, así como también por basurales. La existencia en la zona de decenas de industrias, cuyos efluentes llegaban hasta hace pocos años, directa o indirectamente al curso de agua constituye uno de los factores determinantes de la contaminación de la Bahía de Montevideo (Figura 1).

---

<sup>1</sup> Una parte del contenido de este artículo se basa en una conferencia plenaria presentada por el autor en el octavo encuentro del International Center for Earth Sciences, realizado en Mar del Plata, Argentina, en 2012 [1]. Exceptuando la construcción y aplicación de modelos de mecánica de fluidos computacional (CFD) en la bahía y en las aguas costeras próximas, la totalidad de los trabajos de campo, de laboratorio y de modelado matemático que se relatan fueron coordinados por el autor y llevados a cabo con la participación de diversas instituciones públicas y privadas de Uruguay (Ministerios, Universidades, Fuerzas Armadas, Administración Nacional de Puertos, Intendencia Municipal de Montevideo, ADES). Además, en la mayor parte de los trabajos participaron expertos del Organismo Internacional de energía Atómica de NNUU a través de proyectos nacionales de cooperación que se mencionan en el desarrollo del artículo. Los modelos originales que aparecen en el presente trabajo fueron construidos por el autor.



Figura 1. Esquema del saneamiento de Montevideo en el período 1991-1995.

En la figura se indican los arroyos Carrasco (desembocando en el Río de la Plata al Este), Pantanoso y Miguelete desembocando en la bahía. En Punta Carretas se encuentra el actual emisor subacuático, mientras que en Punta Lobos, en el extremo Oeste de la boca de la bahía, se ubicará un segundo emisor subacuático de la ciudad.

En 1990 comienza a funcionar el emisor subacuático, que recolecta las aguas y las vuelca río adentro, a una distancia de 2.200 metros al sur de Punta Brava (Punta Carretas).

La calidad de las aguas de las playas de Montevideo mejora con la entrada en servicio del emisor subacuático, pero menos de lo esperado. Una explicación podría ser que el emisario no funcionara de acuerdo a lo previsto. Pero si lo hacía bien, entonces debía haber otra razón para la contaminación residual.

Una posibilidad para explicar esa contaminación remanente era que se debiera a ciertos vertidos directos de aguas residuales en las cercanías de la orilla, en el arco de playas al Este de la boca de la bahía, vertidos que todavía no habían sido incorporados en un colector perimetral que los condujera al emisor subacuático.

Por otra parte, todavía hoy, cuando la lluvia es lo bastante copiosa, el sistema de saneamiento libera las aguas residuales a través de un conjunto de aliviaderos situados a

Entre 1991 y 2001 se llevaron a cabo trabajos de campo en la bahía y en las aguas costeras de la región de Montevideo, destinados a estudiar procesos de transporte de masa y dinámica de sedimentos.

Para diseñar los trabajos de campo, valorar aspectos de protección radiológica de la población y de los trabajadores ocupacionalmente expuestos, y para interpretar los resultados obtenidos mediante una caracterización paramétrica de los procesos, se utilizaron modelos matemáticos analíticos.

en la costa, debido a lo cual la contaminación de las aguas costeras aumenta transitoriamente durante uno o dos días.

Finalmente, otra posibilidad era un efecto contaminante debido a las aguas de la propia bahía de Montevideo.

La necesidad de dilucidar el origen de la contaminación residual motivó una parte de los experimentos con trazadores radioactivos<sup>2</sup> considerados en el presente artículo.

Algunos de estos modelos (el modelo de dos compartimentos y el modelo fractal de tres compartimentos para la cinética del THO en la Bahía de Montevideo, y el modelo para la estimación del  $T_{90}$  en aguas costeras estratificadas) se construyeron a la medida de las necesidades específicas planteadas por los experimentos, y son originales.

## **PRIMERA PARTE: RESUMEN DE LOS TRABAJOS DE CAMPO**

En noviembre y diciembre de 1991 se llevó a cabo, coordinada desde la Dirección Nacional de Tecnología Nuclear del Ministerio de Industria, Energía y Minería de Uruguay, y en el marco de un proyecto nacional de cooperación técnica con el OIEA, una investigación experimental preliminar de la dinámica y renovación del agua en la Bahía de Montevideo [2]. La Figura 2 muestra la bahía y la región de aguas costeras adyacentes.

---

<sup>2</sup> Los trazadores, radioactivos o no, son una herramienta utilizada para estudiar experimentalmente el transporte de masa en procesos industriales, hidrológicos y ambientales. Un trazador bien seleccionado se integra en el medio que se desea investigar. Es estable, o si no lo es, su velocidad de decaimiento se conoce bien. Se puede distinguir de las partículas del medio que lo rodea por sus propiedades físicas o físico-químicas. Su presencia no afecta en forma significativa la dinámica investigada y el movimiento de las partículas de trazador resulta representativo del movimiento de las partículas del medio al cual se ha integrado. Entonces, estudiando cómo se distribuye espacialmente y cómo varía en el tiempo la concentración de trazador en el medio, se obtiene información sobre el comportamiento en dicho medio.

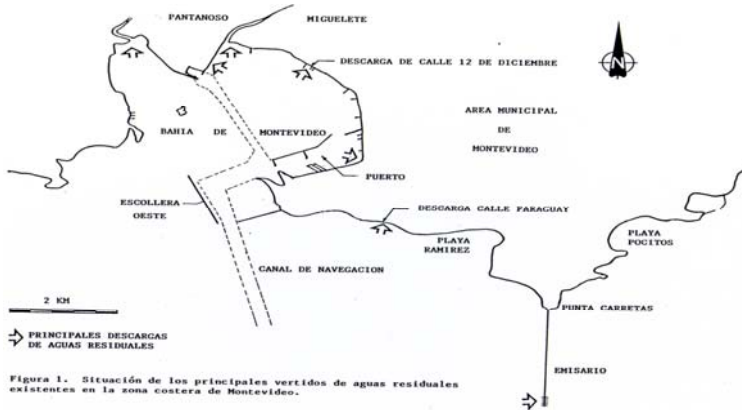


Figura 2. Esquemas de descargas de aguas residuales, cloacales y pluviales, en la bahía y la costa al Este de la boca de la bahía en el período 1991-1995. Se indican los arroyos Miguelete y Pantanoso y el emisario subacuático. A la izquierda del canal de conexión del puerto con el muelle de la refinera de petróleo se observa la isla Libertad.

Se utilizó tritio como trazador principal. Se obtuvieron resultados que sugerían que los contaminantes presentes en las aguas de la bahía (disueltos o integrados en sedimentos en suspensión) podían afectar la calidad de las aguas de las playas situadas al Este.

Como estos experimentos se habían diseñado para estudiar la dinámica y la renovación del agua en la bahía y no para estudiar un posible efecto contaminante sobre las playas, dada la importancia que este último proceso podría tener, se suspendió el estudio de dinámica de sedimentos en la bahía y se decidió estudiar la dinámica de las aguas costeras al Este de la boca de la bahía.

Por ello, entre 1993 y 1996 se realizó una nueva serie de experimentos con trazadores, especialmente diseñados para estudiar el problema de una posible contaminación de las playas debida a la bahía y para obtener información sobre el funcionamiento del emisor subacuático de Punta Carretas.

La primera fase de esa investigación se llevó a cabo en marzo y abril de 1993, a solicitud de autoridades de la Universidad de la República, utilizando tritio y fluoresceína sódica, también conocida como uranina.

Simultáneamente, respondiendo a una solicitud del gobierno de Montevideo, se llevó a cabo un estudio experimental de la ubicación y la estabilidad de la pluma de descarga del emisor subacuático de Punta Brava, utilizando  $^{131}\text{I}$  como trazador. Se puso a prueba la hipótesis según la cual dicho emisor no sería el causante de la contaminación residual observada en las playas de Montevideo, situadas al Este de la boca de la bahía, durante la temporada estival [3], [4].

Como puede verse en la Figura 2, inmediatamente hacia el Este de Punta Carretas (Punta Brava) se encuentra la Playa Pocitos.

Los resultados de los estudios de los procesos de transporte a lo largo de la franja costera sugerían que esa playa presenta un considerable efecto de trampa, debido probablemente a la perturbación que la Punta Brava produce sobre el flujo de las aguas costeras.

Un accidente de contaminación que se produzca en la capa superior de las aguas costeras adyacentes a la Playa Pocitos, si bien adquiriría un carácter marcadamente local, por eso mismo podría tener consecuencias graves en esa zona.

Por este motivo en marzo, abril, mayo y junio de 1995 se investigó el efecto de trampa en la playa Pocitos y se determinaron los parámetros de dispersión en las aguas costeras del Montevideo adyacentes a Punta Brava [5].

Durante algunos experimentos preliminares se observaron efectos de histéresis muy marcados (la forma inicial de la mancha de trazador influía considerablemente en la posterior dinámica de la dispersión, hasta que la mancha de trazador superaba los 500 metros de diámetro). Para minimizar el efecto de histéresis se ideó un nuevo procedimiento de inyección del trazador, que se empleó en los experimentos definitivos.

Por otra parte los resultados de esos experimentos preliminares sugerían prestar atención a algunos detalles de la microcirculación en la capa de agua superior (particularmente en superficie), e intentar cuantificar un posible efecto de escala asociado al proceso de dispersión en esa capa.

Para estudiar esos detalles asociados con micro-circulación local, se efectuó una grabación de video de la evolución de una mancha de Fluoresceína Sódica, a bordo de un helicóptero y con cámaras especiales. La digitalización de la imagen permite aplicar técnicas de geometría fractal a los bordes de la mancha [6].

En 1996 y 1997 se llevó a cabo un estudio experimental de la dinámica de sedimentos en la Bahía de Montevideo y en las zonas de descarga del material dragado, que había sido postergado luego de las campañas de 1991 para el estudio de la dinámica y renovación del agua. Se utilizó  $^{198}\text{Au}$  como trazador para sedimentos en suspensión y  $^{192}\text{Ir}$  para sedimentos de fondo.

Se determinaron perfiles verticales de distribución de sedimentos, en suspensión y acumulados en la cántara de una draga de succión, empleando una sonda nuclear construida especialmente para este fin en el marco de un proyecto nacional de cooperación técnica con el OIEA [7].

Finalmente, nuevamente respondiendo a una solicitud del gobierno de Montevideo, en junio y julio de 2001 se estudió la capacidad de autodepuración de las aguas costeras de Montevideo en la región de Punta Lobos, en vista de la instalación de un segundo emisor sub-acuático. Se utilizaron Rodamina WT como trazador principal, uranina como trazador

secundario y una población bacteriana de *E. coli* como contaminante microbiológico representativo [8].

## **Trabajos de campo**

Durante las campañas de estudio de la dinámica y renovación del agua en la Bahía de Montevideo se llevaron a cabo:

- Mediciones de perfiles de temperatura y conductividad en diferentes estaciones de muestreo en la bahía.
- Medida de flujos de agua utilizando trazadores fluorescentes.
- Marcado del compartimento noroeste de la bahía (situado por encima de una línea que une el espigón F del puerto con la isla Libertad) empleando 100 Ci de THO como trazador. El trazador se diluyó en 200 litros de agua de la bahía. Se inyectó en forma continua, mediante una bomba peristáltica, durante 5 horas, en el rastro de la barca utilizada.
- Marcado del vertido de aguas servidas del colector 12 de diciembre con  $^{131}\text{I}$ .

En la mayor parte de los trabajos con radioisótopos que se describen en este artículo participaron expertos de la sección de hidrología isotópica del OIEA, quienes contaron con sus propios dosímetros. Esto permitió comparar las dosis informadas por el OIEA con las dosis determinadas localmente, en la Dirección Nacional de Tecnología Nuclear.

Para cada trabajo de campo se solicitó y se obtuvo, de parte de la autoridad competente, la correspondiente autorización para el uso de radioisótopos sobre la base de la justificación de la práctica, comparada con posibles alternativas, su optimización y la limitación de la dosis tanto para los trabajadores ocupacionalmente expuestos como para el público en general. Durante las operaciones se aplicaron medidas de seguridad y se realizó un monitoreo ambiental, por los oficiales de protección radiológica, de acuerdo con las normas. Se establecieron medidas de seguridad para enfrentar situaciones no planificadas que involucraran riesgo de exposición o de contaminación. Se produjo un incidente durante las maniobras previas al marcado de la pluma de descarga del emisario de Punta Brava con  $^{131}\text{I}$ , que involucró a un funcionario del OIEA. Se resolvió satisfactoriamente aplicando las medidas de seguridad previstas para el caso. El resto de los trabajos se desarrollaron sin incidentes ni accidentes.

Para el procesamiento de los datos y su representación matemática, la bahía se subdividió en celdas a cuyos puntos medios (correspondientes a estaciones de muestreo) se les asignaron perfiles de temperatura, conductividad y concentraciones de tritio (Figura 3).

Además, se midieron las concentraciones de tritio en puntos de muestreo distribuidos a lo largo del cinturón de playas situadas al Este de la boca de la bahía, hasta la desembocadura del arroyo Carrasco.

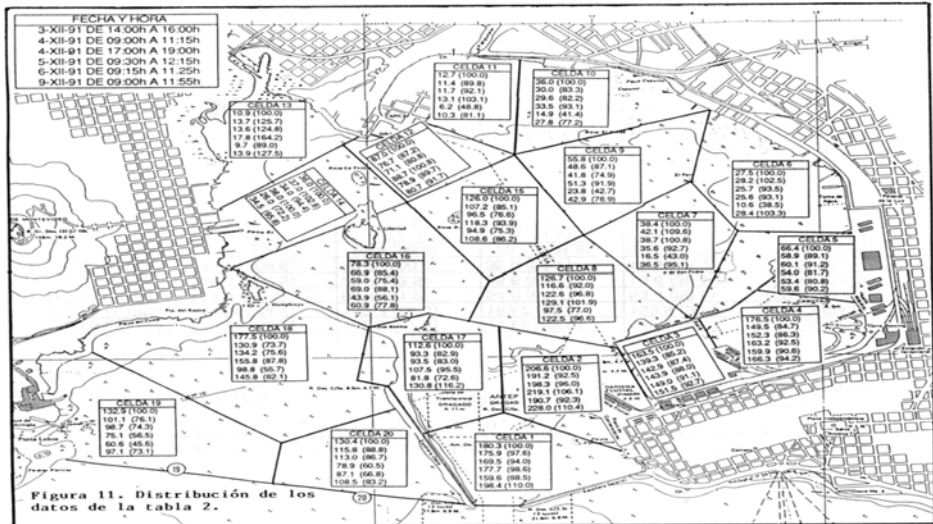


Figura 3. Sub-división de la bahía en celdas.

La Figura 4 presenta algunos detalles batimétricos utilizados para programar las operaciones e interpretar los resultados obtenidos en los trabajos de campo, expresados en un formato adecuado para implementar una simulación digital del campo de velocidades y de niveles del agua variables asociados a las mareas astronómicas y meteorológicas.

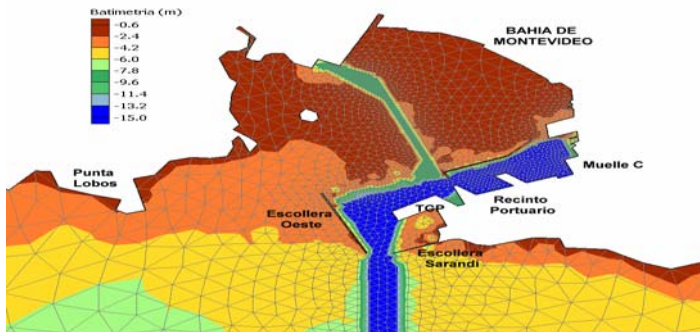


Figura 4. Detalles batimétricos relevantes para los trabajos de campo y subdivisión del dominio espacial para los trabajos de simulación digital (CFD) mediante aplicación del método de elementos finitos. Un ejemplo de cálculo numérico aparece en la Figura 5.

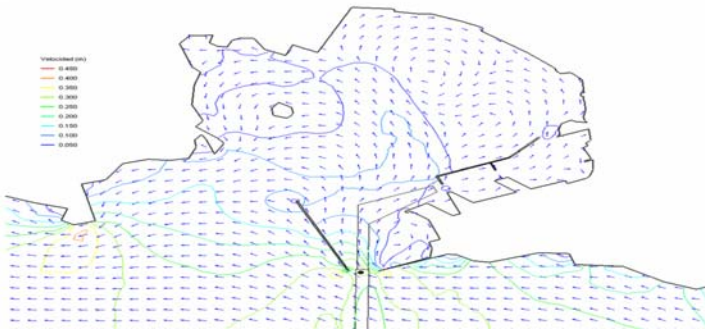


Figura 5. Algunos resultados de la simulación digital del campo de velocidades durante la marea creciente obtenidos por el IMFIA, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.

Para investigar un posible efecto de contaminación de las playas debido a la liberación de contaminantes de la bahía en condiciones de marea descendente (o sea con carreras de marea hacia el Este) se inyectaron en forma súbita 100 Ci de THO en un lugar que aparece indicado en la Figura 6: cerca del extremo distal (respecto de la costa) de la escollera Sarandí, en las proximidades y al Este del canal de acceso al puerto de Montevideo.

Durante las campañas de marcado y estudio de la distribución de las aguas contaminadas que escapan de la bahía de Montevideo se efectuó un estudio sobre cinco transectas fijas. En cada transecta se definieron seis puntos de muestreo, separados por 1 km, y comenzando siempre con un punto en la costa [3], [4]. La Figura 5 muestra las transectas mencionadas, donde se determinaron concentraciones de tritio, conductividad y temperatura durante tres semanas.

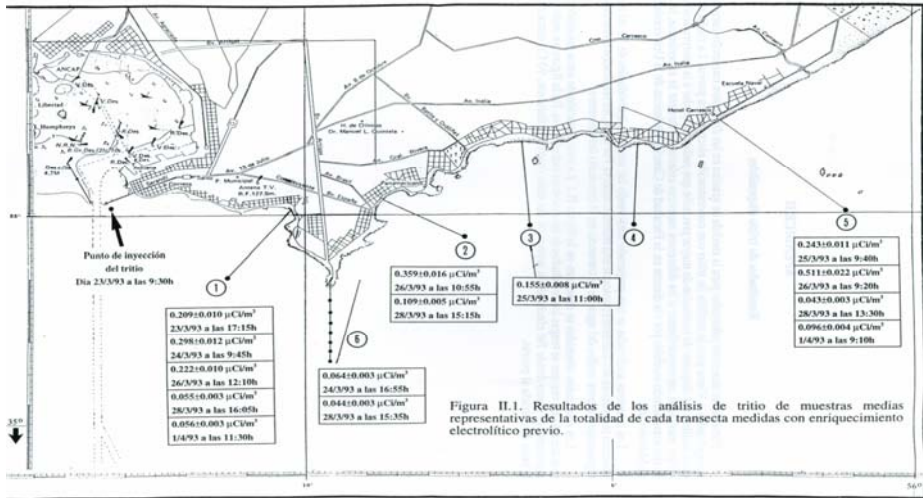


Figura II.1. Resultados de los análisis de tritio de muestras medias representativas de la totalidad de cada transecta medidas con enriquecimiento electrolítico previo.

Figura 6. Ubicación del punto donde se inyectaron en forma súbita 100 Ci de THO y de las transectas donde se determinaron concentraciones de tritio, conductividad y temperatura durante tres semanas.

Durante las campañas de marcado y estudio de la pluma de descarga del emisor subacuático de Punta Brava se midieron las actividades del trazador en puntos de la pluma de descarga del emisor, que se movía arrastrada por las corrientes [3]. En la referencia [9] y en su bibliografía se pueden encontrar detalles sobre las técnicas empleadas.

Se efectuaron dos campañas. En cada una se inyectó una solución de yoduro de potasio marcada con <sup>131</sup>I en una de las piletas de tratamiento previas al emisor, durante 2 h 45 min, a razón de 0.5 l/min. La concentración del trazador era 1377 µ-Ci/m<sup>3</sup>. Se siguió el despliegue de la pluma de descarga marcada durante ocho horas cada vez, a tiempo real, utilizando detectores de centelleo. La pluma fue detectada y medida en cinco ocasiones, hasta que la dilución del trazador impidió continuar con las mediciones. Se utilizaron biplanos y uranina para posicionamiento y mediciones de velocidad del agua.

Durante las campañas de simulación de un accidente de contaminación en la playa Poci-tos, se inyectaron en forma localizada y súbita soluciones de uranina y se midió el transporte advectivo y la dispersión de las manchas de colorante. Se repitieron los experimentos en las cercanías del emisor subacuático. Al principio, se aplicaron técnicas de medición a bordo de las concentraciones de trazador, en condiciones de flujo continuo mediante un fluorímetro, durante una secuencia de maniobras de navegación efectuadas sobre la mancha en cada una de las etapas de evolución seleccionadas. Estas técnicas no permiten suficiente resolución espacial para estudiar el mencionado efecto de histéresis y detalles

debidos a los efectos de micro-circulación. Por este motivo se decidió registrar la mancha de trazador, por medios ópticos y desde el aire, para estudiar posteriormente la estructura de sus bordes mediante herramientas de análisis de patrones bidimensionales. Con el propósito de disminuir lo más posible la histéresis, se diseñó y construyó un corral para la inyección de trazadores [5], que resultó muy eficaz, por lo cual fue utilizado en las campañas siguientes (Figura 7).

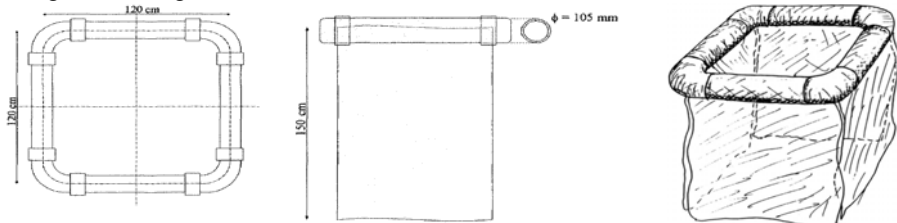


Figura 7. Corral concebido y construido por Alejandro Malek para inyectar trazadores de modo de minimizar efectos de histéresis y facilitar la investigación de los efectos de escala en aguas costeras.

Para determinar los parámetros de la dispersión se efectuaron dos inyecciones en la capa superior del cuerpo de agua estratificado y una inyección en el cuerpo no estratificado. Se describió el efecto de escala suponiendo un coeficiente de dispersión horizontal del tipo  $E_h \approx A \cdot r^q$  donde  $q$  representa el parámetro de efecto de escala. Para estimar  $q$  se aplicó el método de los círculos equivalentes [5]. Para estimar la cantidad de trazador a inyectar en la capa superior del cuerpo de agua se asumió a priori  $q=1$ . Estos aspectos se retoman en la segunda parte del artículo.

Durante las campañas de dinámica de sedimentos se efectuó el seguimiento del material dragado marcado y descargado por la draga.

Se determinaron parámetros de dispersión de la nube de partículas en suspensión, se estimaron tasas de sedimentación y se estudió el movimiento del material sedimentado.

Se efectuaron mediciones relacionadas con la profundidad náutica y con la optimización del tiempo de bombeo en dragas de succión [7].

Durante las cuatro campañas destinadas a estudiar la capacidad de autodepuración de las aguas costeras de Montevideo en la región de Punta Lobos, en todos los casos se inyectó, en la zona prevista para el emisor subacuático, en forma súbita y puntual, una masa de efluente conteniendo la población bacteriana, acompañada de un trazador fluorescente y conservativo (rodamina WT) para determinar la dilución por el proceso de advección-dispersión.

El objetivo final fue obtener una estimación del  $T_{90}$  bacteriano en diferentes escenarios. Se utilizó uranina como trazador secundario cualitativo, para visualizar la ubicación del vertimiento efectuando marcados sucesivos al finalizar cada etapa de mediciones. En

cada etapa se tomaron muestras para determinar unidades formadoras de colonias y concentración del trazador en laboratorio.

Además se determinó la posición de cada punto de toma de muestras, los perfiles verticales de velocidad de corriente, de temperatura y de conductividad, la velocidad local del viento, la turbidez del cuerpo de agua, el pH, la DBO y otras variables características de cada escenario en el que se produce el transporte advectivo-dispersivo y la inactivación bacteriana.

## Resumen de resultados experimentales

La dinámica del agua en la bahía se puede simplificar asumiendo la presencia de dos flujos separados, cuyas características dependen de la ubicación variable del extremo de la cuña salina en las aguas costeras de Montevideo: un flujo de agua de baja conductividad que ocupa una capa de menos de 4 m de profundidad y un flujo de agua de conductividad más elevada que ocupa las zonas con profundidades mayores a los 4 m.

Este último flujo penetra a través del canal de acceso al puerto. El otro flujo penetra preferentemente a través de la boca Oeste.

La estratificación del agua en la bahía es permanente, lo cual debe ser tomado en cuenta al construir modelos matemáticos para la simulación de la dinámica y la renovación del agua.

Durante la marea creciente (carrera de marea dirigida hacia el Oeste) el patrón de flujos en la bahía es variable, dependiendo de los vientos, pero en promedio corresponde a una fase de llenado.

Durante la marea decreciente (carrera de marea dirigida hacia el Este) el flujo que desciende por el estuario, próximo a la costa, es desviado por la escollera Oeste y se divide en dos.

Se produce entonces un flujo secundario que pone en movimiento a una parte significativa del agua de la bahía bajo la forma de un flujo circular en el sentido de las agujas del reloj: este movimiento es el principal responsable del mezclado y de la renovación del agua (Figura 8, izquierda).

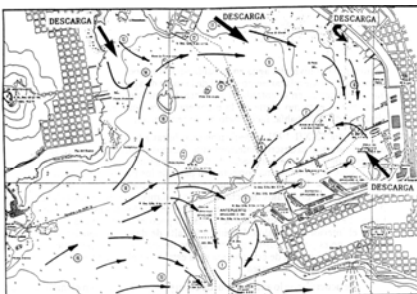


Figura 13. Esquema de flujos más frecuente en la bahía durante los periodos de marea decreciente.

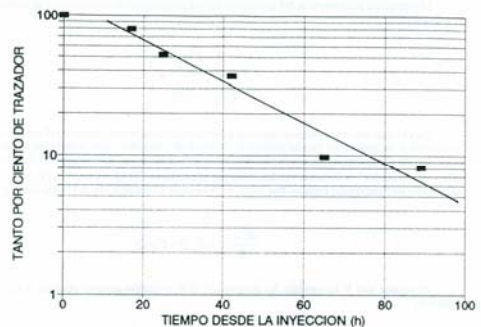


Figura 8. Izquierda: flujo circular en la bahía, cuando la carrera de marea se dirige hacia el Este. Derecha: estimación de un tiempo de renovación del agua de la bahía a partir de los datos de actividad total remanente (en coordenadas logarítmicas) versus tiempo. En este caso el resultado fue de 29 horas.

La marea decreciente corresponde a una fase de vaciado: la bahía se comporta como una bomba de descarga intermitente de contaminantes en las aguas costeras adyacentes. A partir del volumen y la concentración en cada una de las celdas en las que se dividió la bahía (Figura 3) se puede estimar la actividad de tritio remanente en función del tiempo (Figura 8, derecha).

Considerada en conjunto, el agua de la bahía se renueva con un tiempo promedio de 29 horas, si se asume un único compartimento representativo. Si se consideran los compartimentos parciales definidos por las celdas de muestreo, el tiempo de renovación disminuye al pasar de las celdas de la parte suroeste hacia las celdas de la parte noreste. En la mayor parte de esas celdas el tiempo de renovación es relativamente corto. Las zonas de renovación más lenta corresponden a la desembocadura de los arroyos Miguelete y Pantanoso, a las dársenas del puerto y a la región comprendida entre el espigón F y la central termoeléctrica.

En las campañas efectuadas en marzo y abril de 1993 se encontró un cuerpo de aguas costeras con una estratificación bastante neta. Generalmente se observaron dos capas de agua de diferente salinidad, separadas por una picnóclina: una capa superior, de agua más dulce, de río, y una capa inferior, de agua más salada, proveniente del océano.

Al mismo tiempo la conductividad variaba horizontalmente aumentando hacia el Este tanto en la superficie como en el fondo y la profundidad de la picnóclina aumentaba hacia el Oeste.

Una diferencia de conductividad entre el fondo y la superficie de 10 mS/cm a través de una columna de agua de 6 m, con una capa de 1 m de espesor a 3 m de profundidad, donde la conductividad varía bruscamente en 5 mS/cm (haloclina), es representativa de la situación. Las diferencias de temperatura medidas (menos de 2 °C) entre la superficie y el fondo del estuario no inciden en forma significativa en la estratificación, puesto que 2°C corresponden a una diferencia de densidad de 0.6 g/l, contra los 7 g/l correspondientes a una diferencia de conductividad de 10 mS /cm.

De un día a otro se producían variaciones en más o en menos respecto de los valores de conductividad obtenidos en el mismo punto y a la misma distancia de la superficie. Estas modificaciones, bien conocidas, se deben al avance o al retroceso de masa de agua salada o de agua dulce. Pero el patrón de estratificación vertical se mantuvo en todos los casos.

Durante los días 24 al 28 de mayo se produjo una invasión de agua de baja salinidad proveniente del Oeste. La conductividad en la playa Pocitos, durante esos días, no descendió a los valores bajos (4 mS/cm) medidos en la playa Ramírez. A partir del día 28 se produjo

una invasión de agua más salina (conductividades superiores a 35 mS/cm) proveniente del Este.

Las estimaciones de velocidad efectuadas utilizando biplanos y las mediciones con correntómetros muestran en general una diferencia significativa en las velocidades promedio entre la capa de agua predominantemente dulce y la capa de agua predominantemente salada. Esas diferencias dependen del instante en el ciclo de marea astronómica y de los vientos predominantes.

En la zona del emisor subacuático, durante el segundo experimento con  $^{131}\text{I}$ , las velocidades en la capa superior fueron aumentando desde 140 m/h hasta 310 m/h, mientras que las velocidades en la capa inferior aumentaron desde 360 m/h hasta 1200 m/h, para descender luego a 960 m/h hacia el final del experimento.

El agua circula a lo largo de una franja cuyo ancho varía entre 1 y 5 km, con la región más estrecha a la altura de Punta Carretas. Los procesos de transporte son muy rápidos a lo largo de la costa: en dos o tres días una partícula que parte próxima a la boca de la bahía puede alcanzar la playa Carrasco, a más de 15 km de distancia.

La primera detección de tritio se efectuó a las 2 horas de ocurrida la pleamar siguiente a la inyección del trazador. En ese entonces el agua marcada había llegado ya a la transecta 1 (playa Ramírez, ver Figura 6) con una concentración elevada en un punto próximo a la costa.

Al día siguiente no se encuentra tritio en la transecta 2 (playa Pocitos) ni en la zona más próxima a la costa de la transecta 3. Pero se halla el trazador en la zona más alejada de la transecta 3 y en la transecta 4. Esto indica que en la playa Pocitos se produce un **efecto de trampa** que tiene como consecuencia que las descargas locales de contaminantes adquieran más importancia allí que en otras zonas de la costa.

La aparición de agua de conductividades muy diferentes, marchando en sentidos opuestos y mezclándose con el agua marcada no llegan a producir una renovación apreciable del agua de la zona costera investigada: el tritio continuó estando distribuido a lo largo de la cadena de playas, a concentraciones más bajas pero medibles sin dificultad.

Durante los estudios de estabilidad de la pluma de descarga del emisor de Punta Brava, la sensibilidad del detector en las condiciones del experimento fue de 2.1 cuentas por segundo por metro cúbico y micro-curio. Efectuando un balance de masa se puede estimar una concentración de  $442 \mu\text{-Ci/m}^3$  a la salida del emisario, para un flujo de 1 metro cúbico por segundo. Esto corresponde a una respuesta de 998 cuentas por segundo en el detector.

Como el máximo valor medido en el penacho formado a la salida de los difusores fue de 181 cuentas por segundo, esto indica que el factor de dilución en ese punto era de 5.1.

Este coeficiente de dilución inicial determinado con trazadores es casi la tercera parte del coeficiente estimado mediante la teoría de chorros en medios estratificados [3].

La medición de la actividad del trazador mostró que el agua descargada quedaba atrapada por debajo de la picnóclina, en forma completamente estable. Viajaba hacia el Oeste, siguiendo la carrera de marea ascendente, aumentando paulatinamente su profundidad y expandiéndose horizontalmente más y más.

Cuando las velocidades de flujo son bajas, las aguas residuales viajan dentro de una capa de menos de 1 m de espesor que se ensancha progresivamente a medida que el vertido se aleja de los difusores.

A velocidades mayores aumenta el transporte por difusión turbulenta vertical en el fondo del estuario, por lo que se produce un mezclado vertical del agua situada entre el fondo y picnóclina. Se detecta experimentalmente a través del perfil vertical de actividad del trazador en la 5ª detección de la pluma (Figura 9).

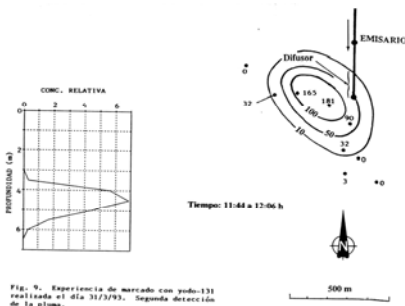


Fig. 9. Experiencia de marcado con pedo-131 realizada el día 31/3/93. Segunda detección de la pluma.

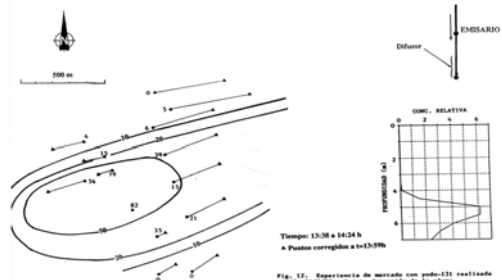


Fig. 12. Experiencia de marcado con pedo-131 realizada el día 31/3/93. Quinta detección de la pluma. \* Puntos corregidos a t=13:50h.

Figura 9. Izquierda: segunda detección de la pluma. Derecha: quinta detección de la pluma. Las líneas de iso-actividad para la quinta detección de la pluma están corregidas para tener en cuenta efecto del transporte advectivo durante el intervalo de tiempo involucrado en las mediciones.

La dilución del trazador aumentó muy rápidamente y las concentraciones alcanzaron en algunos puntos valores por debajo de los límites de detección. No obstante, la halóclina no se desvanece: permanece como un techo difusivo para las aguas residuales vertidas por el emisario, debido a lo cual la transferencia de agua contaminada hacia las capas superiores se produce con dificultad.

El espesor inicial de la pluma de descarga del emisor sub-acuático puede estimarse a partir del factor de dilución mínimo, del flujo descargado por unidad de longitud del tramo de difusores y de la velocidad de la corriente transversal al tramo de los difusores. Si se toma una velocidad de 400 m/h (que corresponde al comienzo del experimento), una longitud de 67 m para el tramo de difusores y el flujo total descargado, se obtiene un espesor de 0.7 m para el inicio de la pluma [3].

El espesor estimado a partir de los perfiles de actividad fue de 2 m.

Estas dos estimaciones son compatibles por dos motivos: (1) el trazador no viaja en una lámina de concentración constante y (2) el detector es capaz de captar fotones gama proveniente de puntos relativamente alejados.

Aunque el peso del aporte de un elemento de volumen al número total de cuentas cae rápidamente con la distancia entre dicho elemento y el detector, este último comienza a producir una señal significativamente por encima del ruido de fondo cuando todavía se encuentra algo alejado de la nube de trazador.

En las campañas llevadas a cabo en la segunda mitad del mes de mayo y en el mes de junio de 1995, la estratificación vertical típica de la época estival había desaparecido, y la diferencia de temperatura entre la superficie y el fondo, de dos o tres de grados se había reducido a menos de un grado Celsius.

Se obtuvieron valores del parámetro de efecto de escala próximos a 1 al comienzo del proceso. Los valores del parámetro de escala fueron disminuyendo continuamente hasta anularse cuando la nube de trazador se había hecho lo bastante extensa, aproximadamente luego de transcurrida una hora y media desde el momento de la inyección.

Cuando la mancha es lo suficientemente grande (su menor dimensión superior a los 700m) se puede utilizar el modelo Gaussiano para una caracterización paramétrica del proceso de dispersión del trazador. Para los coeficientes de dispersión longitudinal se obtuvieron valores próximos a  $1 \text{ m}^2/\text{s}$  ( $K_L \approx 0.83 \text{ m}^2/\text{s}$ ) y cerca de veinte veces menores para los coeficientes de dispersión transversal ( $K_T \approx 0.018 \text{ m}^2/\text{s}$ ).

En las campañas de 2001 destinadas a estudiar la capacidad de autodepuración de las aguas costeras en la región de Punta Lobos se estimaron, para el parámetro equivalente al  $T_{90}$ , valores comprendidos entre 6 y 12 horas, tomando valores mínimos en los escenarios correspondientes a las dos últimas campañas y valores máximos en los escenarios correspondientes a las dos primeras. Si bien las temperaturas del aire durante las últimas dos campañas eran relativamente elevadas para la época del año, la temperatura del agua no lo reflejaba, como cabía esperar. En las primeras dos campañas la turbidez del cuerpo de agua era significativamente mayor que la turbidez durante los dos últimos trabajos de campo.

## **SEGUNDA PARTE: MODELOS MATEMÁTICOS**

En general conviene distinguir dos tipos de modelos matemáticos: los que se utilizan para el diagnóstico y los que se utilizan para el pronóstico de las propiedades de un cuerpo de agua. Ambos tipos de modelos matemáticos, de diagnóstico y de pronóstico, se pueden combinar con el empleo de trazadores.

Los modelos de diagnóstico permiten caracterizar los procesos de transporte de masa mediante un conjunto de parámetros significativos.

Los modelos de pronóstico permiten la predicción de algunas características de importancia de los procesos de transporte, basada en los parámetros hallados aplicando los modelos de diagnóstico y en otra información relevante.

Algunas veces un mismo modelo se puede utilizar tanto para diagnóstico como para pronóstico.

Actualmente, con fines de pronóstico, la mayor parte de las veces se utilizan sofisticados códigos de cálculo en el marco de la CFD, que se calibran para cada aplicación específica. Muchos de estos códigos están disponibles bajo la forma de paquetes de software comerciales. Permiten obtener soluciones numéricas válidas para determinado conjunto de valores de los parámetros. Los procedimientos para graficar las soluciones, como el campo de velocidades que muestra la Figura 5, ayudan a identificar patrones interesantes como los vórtices horizontales en la región nordeste de la bahía que muestra esa figura.

Ahora bien, no siempre se pueden hallar relaciones de validez general o se pueden identificar procesos interesantes a partir de un conjunto de simulaciones digitales si no se dispone de información adicional para guiar el cálculo numérico. Si resulta factible (cosa que muchas veces no lo es) el recurrir a modelos analíticos permite obtener resultados para todos los valores de los parámetros, facilita la extracción de relaciones de validez general y la comprensión de esas relaciones, y puede suministrar información útil para la simulación digital.

Los modelos matemáticos que se describen y discuten a continuación son algunos de los modelos analíticos utilizados para diseñar e interpretar los experimentos con trazadores reseñados en la primera parte del artículo.

## **Modelos de compartimentos para describir la renovación del agua en la Bahía de Montevideo**

En principio se podría plantear un modelo matemático de compartimentos múltiples para la cinética del tritio en la bahía.

Supongamos que la bahía se subdivide en  $p$  compartimentos, que se supone son homogéneos para los fines del modelo.

Las ecuaciones de balance de los volúmenes de los compartimentos se pueden escribir

$$\text{así: } \frac{d}{dt} V_i = \sum_{j=1, j \neq i}^p Q_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^p Q_{ji} + Q_{ic} - Q_{ci} + Q_{fi} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

Aquí  $Q_{ij}$  es el influjo de volumen que recibe la celda  $i$  desde la celda  $j$ ,  $V_i$  es el volumen de la celda  $i$ ,  $Q_{ci}$  es el eflujo de volumen desde la celda  $i$  hacia las aguas costeras,

$Q_{ic}$  es el influjo de volumen hacia la celda  $i$  desde las aguas costeras y  $Q_{fi}$  es la suma de todos los influjos de agua de arroyos o vertidos sanitarios que van a parar a la celda  $i$ .

En general los flujos hacia y desde las aguas costeras son nulos, excepto en las caldas adyacentes a esas aguas. Los influjos de agua dulce son diferentes de cero en las celdas que reciben vertidos sanitarios o son adyacentes a la desembocadura de cursos de agua como los arroyos Miguelete y Pantanoso.

Las variaciones de volumen en las condiciones en las que se llevaron a cabo los trabajos de campo no superaron el 10 % del volumen de cada celda. Por ello y con el fin de simplificar el modelo, *supondremos que los volúmenes permanecen constantes*. Una discusión sobre este punto puede hallarse en la referencia [10].

Supongamos ahora que la actividad de tritio en la celda  $i$  se representa por  $A_i(t)$ . Un balance de actividades en una escala de tiempo en la cual el trazador radioactivo se puede considerar conservativo (del orden de cientos de horas comparada con los más de 10 años de tiempo de semi-desintegración del tritio) conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de las probabilidades  $P_i(t) = \frac{A_i(t)}{A_0}$  de hallar una partícula de trazador en cada una de las celdas en el instante  $t$ :

$$\frac{d}{dt} P_i(t) = \sum_{j=1}^p m_{ij} \cdot P_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Por definición  $m_{ij} = \frac{Q_{ij}}{V_j}$  cuando  $i \neq j$ . Cuando  $i = j$ ,  $m_{ij} = -\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^p Q_{ji} + Q_{ci}}{V_i}$

Se supone que no hay reflujos de THO desde las aguas costeras hacia la bahía. Esta suposición se basa en los resultados obtenidos en los trabajos de campo.

En forma matricial: 
$$\frac{d}{dt} \vec{P}(t) = M \vec{P}(t) \quad (3)$$

Aquí la matriz cuadrada  $M = [m_{ij}]_{p \times p}$  y  $\vec{P}(t)$  es un vector columna de  $p \times 1$  formado

por las probabilidades  $P_i(t) = \frac{A_i(t)}{A_0}$ . La solución  $\vec{P}(t)$  de la ecuación matricial (3) para

cualquier condición inicial  $\vec{P}(0)$  se puede construir combinando linealmente soluciones de la forma  $e^{\lambda_k t} \cdot \vec{v}_k$  donde  $\lambda_k$  es uno de los valores propios y  $\vec{v}_k$  es un vector propio correspondiente a ese valor propio.

Siempre se puede asumir que los valores propios son diferentes dos a dos sin modificar la bondad del ajuste a los resultados experimentales [10].

En principio, esta estructura de modelo se podría aplicar con  $p = 20$  compartimentos (un compartimento por cada celda), pero los datos experimentales disponibles no permiten la construcción de un modelo robusto con 20 variables de estado y centenares de parámetros: son demasiado escasos y ruidosos, no permitiendo una adecuada resolución temporal y espacial, aún si se añadiera información proveniente del modelado por métodos de CFD del tipo utilizado en paralelo con los trabajos de campo.

En lo que sigue se consideran un modelo clásico con  $p = 2$  y un modelo con  $p = 3$ . Este último no se reduce al modelo general de  $p$  compartimentos homogéneos porque el tercer compartimento es fractal.

No obstante, con dos o tres compartimentos no se puede dar cuenta de ciertos fenómenos observados durante los trabajos de campo. En particular, la evolución temporal de las actividades en algunas de las celdas ubicadas en el Norte de la bahía exhibe un patrón característico, con incrementos y decrementos sucesivos y cada vez menores. Esto parece estar relacionado con la marcada asimetría en los flujos de intercambio entre celdas vecinas, asociado con el flujo circular del agua durante la marea decreciente que se ve en la Figura 8 (izquierda).

En general el fenómeno mencionado se manifiesta a nivel de la estructura del modelo matemático a través de la aparición de pares de valores propios de la matriz  $M = [m_{ij}]_{p \times p}$  que son complejo-conjugados con parte real negativa y parte imaginaria no nula.

La recta de mejor ajuste que aparece en la Figura 8 (derecha) se trazó excluyendo los datos provenientes de las mediciones efectuadas durante las primeras 18 horas a partir de la inyección del trazador. Pero cuando la recta se extrapola al instante de la inyección, se obtiene una actividad inicial de 133,3 Ci, superior a los 100 Ci inyectados.

Este hecho junto con los detalles espaciales y temporales de la cinética del tritio en la bahía, los datos batimétricos disponibles, información sobre el campo de velocidades del agua en el interior de la bahía obtenida con biplanos, correntómetros, trazadores y resultados de simulación con métodos de CFD (modelos numéricos a elementos finitos promediados en profundidad), sugieren que la bahía puede ser dividida en dos grandes compartimentos: Nord-Este (NE, con un volumen promedio de  $1,6 \times 10^7 \text{ m}^3$ ) y Sud-Oeste (SW, con un volumen promedio de  $3,2 \times 10^7 \text{ m}^3$ ).

Teniendo esto en cuenta, se construyó un modelo clásico de dos compartimentos, NE y SW, con las actividades de tritio en cada uno de esos compartimentos como variables de estado.

La Figura 10 muestra los dos compartimentos, los flujos de volumen que los interconectan entre sí y con las aguas costeras, y los aportes de agua dulce proveniente de tierra.

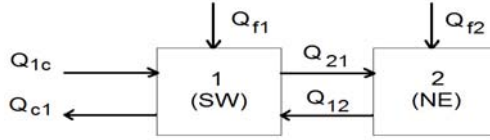


Figura 10. Esquema de un modelo de dos compartimentos para la cinética del tritio.

Si  $A_1(t)$  y  $A_2(t)$  son las actividades en los compartimentos SW y NE respectivamente, el balance de actividades se reduce a las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{d}{dt} A_1 = -\frac{(Q_{c1} + Q_{21})}{V_1} \cdot A_1 + \frac{Q_{12}}{V_2} \cdot A_2 \quad (4 \text{ a})$$

$$\frac{d}{dt} A_2 = -\frac{Q_{12}}{V_2} \cdot A_2 + \frac{Q_{21}}{V_1} \cdot A_1 \quad (4 \text{ b})$$

Con la condición inicial  $A_1(0)=0$  y  $A_2(0)=A_0$  la solución es la siguiente:

$$A_1(t) = A_0 \cdot \frac{Q_{12}}{V_2} \cdot \left( \frac{1}{(|\lambda_2| - |\lambda_1|)} \right) \cdot (\exp[-|\lambda_1| \cdot t] - \exp[-|\lambda_2| \cdot t]) \quad (5 \text{ a})$$

$$A_2(t) = A_0 \cdot \left( \frac{1}{(|\lambda_2| - |\lambda_1|)} \right) \cdot \left( \left( |\lambda_2| - \frac{Q_{12}}{V_2} \right) \cdot \exp[-|\lambda_1| \cdot t] - \left( |\lambda_1| - \frac{Q_{12}}{V_2} \right) \cdot \exp[-|\lambda_2| \cdot t] \right) \quad (5 \text{ b})$$

Aquí  $\lambda_1 = -|\lambda_1|$  and  $\lambda_2 = -|\lambda_2|$  (con  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ) son las raíces siempre negativas de la

ecuación característica: 
$$\lambda^2 + \left( \frac{Q_{21} + Q_{c1}}{V_1} + \frac{Q_{12}}{V_2} \right) \cdot \lambda + \frac{Q_{c1} \cdot Q_{12}}{V_1 \cdot V_2} = 0 \quad (6)$$

Sumando miembro a miembro (5 a) y (5 b) se obtiene la actividad total en la bahía en función del tiempo a partir de la inyección del trazador (que se supone instantánea):

$$A(t) = A_0 \cdot \left( \frac{|\lambda_2| \cdot \exp[-|\lambda_1| \cdot t] - |\lambda_1| \cdot \exp[-|\lambda_2| \cdot t]}{(|\lambda_2| - |\lambda_1|)} \right) \quad (7)$$

La actividad inicial  $A_0$  corresponde a los 100 Ci distribuidos en el compartimento nores- te, que se comunica directamente solo con el compartimento suroeste.

La recta que se dibujó a la derecha en la Figura 7 se ajusta mejor a los datos que corres- ponden a las últimas etapas del vaciado de tritio de la bahía pero no es representativa de la etapa inicial.

Por el contrario la ecuación (7) describe bien esta primera etapa del proceso.

Durante esta primera etapa el tritio ocupa fundamentalmente el compartimento NE y va siendo transportado hacia el compartimento SW. El compartimento SW comprende la boca de la bahía y se comunica directamente con las aguas costeras: el tritio solo puede abandonar la bahía a través de este compartimento. Por este motivo la actividad  $A_2(t)$  en el compartimento NE decrece a partir de  $A_0$  mientras que la actividad  $A_1(t)$  en el compartimento SW crece desde 0, acompañada de eflujo de THO hacia las aguas costeras que es pequeño en relación con el influjo de THO proveniente del compartimento NE.

El ajuste de parámetros, que se describe en la referencia [10], arroja  $0,117 \text{ h}^{-1}$  para  $|\lambda_1|$  y  $0,034 \text{ h}^{-1}$  para  $|\lambda_2|$ .

Una vez desaparecido el efecto de  $|\lambda_1| \cdot \exp[-|\lambda_2| \cdot t]$ , la actividad total remanente se puede describir por la recta asintótica:

$$\log_e A(t) \approx -|\lambda_1| \cdot t + \log_e \frac{A_0}{\left(1 - \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}\right)} \quad (8)$$

Esta expresión corresponde a la recta de la Figura 8. Entonces:  $A_R(0) = \frac{A_0}{\left(1 - \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}\right)}$  (9)

Como por (9)  $A_R(0)$  es mayor que la concentración inicial de tritio  $A_0$ , esta última queda por debajo del punto de intersección de la recta con el eje de los tiempos. La actividad total  $A(t)$  viene representada por curva de la Figura 11.

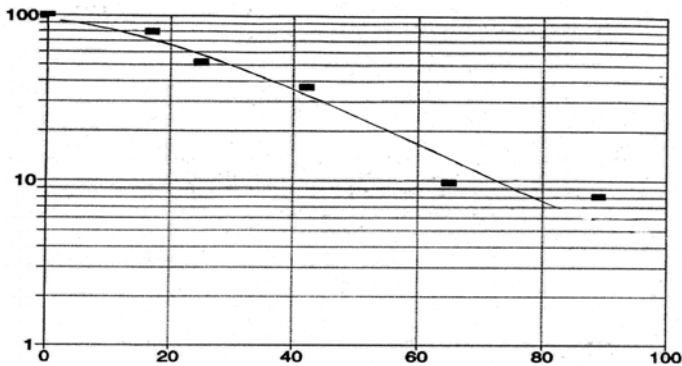


Figura 11. En abscisas el tiempo en horas, a partir de la inyección del trazador. En ordenadas, en escala logarítmica, el porcentaje de actividad de tritio. Los puntos corresponden a mediciones. La curva ajustada corresponde a la actividad total de acuerdo con la fórmula (7).

Al inicio  $\frac{d}{dt}A(0)=0$  y  $\frac{d^2}{dt^2}\log_e A(t)<0$ . Luego, hasta unas 70 u 80 horas a partir de la inyección,  $\log_e A(t)$  se comporta aproximadamente como lo indica la fórmula (8).

Si  $\hat{T}$  es una variable aleatoria que representa el tiempo que reside una partícula de trazador en la bahía, la probabilidad  $P[\hat{T} > t]$  se puede estimar recurriendo a la denominada función de remanencia  $R(t)=\frac{A(t)}{A_0}$  del trazador en la bahía:  $P[\hat{T} > t]=R(t)$

La función de distribución  $f_{\hat{T}}(t)$  de la variable aleatoria  $\hat{T}$  se puede hallar así, teniendo en cuenta que  $P[\hat{T} \leq t]=1-P[\hat{T} > t]$ :  $f_{\hat{T}}(t)=\frac{d}{dt}P[\hat{T} \leq t]=-\frac{1}{A_0} \cdot \frac{d}{dt}A(t)$  (10)

Teniendo a su vez en cuenta que  $\int_0^{+\infty} t \cdot f_{\hat{T}}(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} \frac{A(t)}{A_0} \cdot dt$ , el valor promedio

$T_r = \int_0^{+\infty} t \cdot f_{\hat{T}}(t) \cdot dt$  del tiempo de permanencia (o tiempo de renovación) del trazador se

puede estimar así:  $T_r = \int_0^{\infty} \frac{A(t)}{A_0} \cdot dt$  (11)

Para el modelo clásico de dos compartimentos obtenemos:  $T_r = \frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|}$  (12)

Sustituyendo en (12) los valores 0,117 h<sup>-1</sup> para  $|\lambda_1|$  y 0,034 h<sup>-1</sup> para  $|\lambda_2|$  resulta  $T_r = 37h$ , mayor que las 29 horas obtenidas a partir del modelo de un compartimento.

Si bien el ajuste de la formula (7) a los datos experimentales es bueno durante la mayor parte del proceso de renovación del agua de la bahía, el curso temporal tanto de la cola de la función  $R(t)=\frac{A(t)}{A_0}$  como de las colas de las funciones  $\frac{A_1(t)}{A_0}$  y  $\frac{A_2(t)}{A_0}$  sugiere que las actividades en los compartimentos y la actividad total se desvanecen más lentamente que una función exponencial del tiempo.

Esto plantea un problema que no puede resolverse en el marco del modelo lineal de dos compartimentos clásicos. Si se mantuviera la validez de este modelo, asintóticamente para

$t \rightarrow +\infty$  la actividad en la bahía debería desvanecerse como  $A_0 \cdot \frac{|\lambda_2|}{(|\lambda_2|-|\lambda_1|)} \cdot \exp[-|\lambda_1| \cdot t]$

pero no es esto lo que parece que ocurre. El lento desvanecimiento de la actividad apunta

a un efecto de dispersión anómala de las moléculas de THO, posiblemente vinculado a caminatas aleatorias que se encuentran severamente restringidas en algunas partes del sistema.

La distribución de zonas muertas en el interior de la bahía junto con la geometría del fondo, incluyendo la distribución del barro fluido, sugiere una posible solución al problema: introducir, además de los compartimentos clásicos NE y SW un tercer compartimento, *fractal*. Con esto abandonamos el marco de la teoría clásica de compartimentos y debemos recurrir a la teoría no convencional.

Actualmente hay dos enfoques para la teoría no convencional de la cinética de compartimentos: el fraccionario [11] y el fractal [12].

El enfoque del análisis de compartimentos fraccionario y lineal se basa en introducir flujos hacia o desde un compartimento fractal proporcionales a derivadas de orden fraccionario de las concentraciones. Eso se hace en la referencia [13] para la cinética del tritio en la Bahía de Montevideo.

El enfoque alternativo del análisis de compartimentos lineal no convencional, denominada análisis fractal, se basa en introducir coeficientes cinéticos que son funciones decrecientes del tiempo  $k(t)$ , y tienden a cero para  $t \rightarrow +\infty$  como funciones potenciales del tipo  $t^{-p}$  para  $0 < p < 1$ .

Ambos enfoques permiten tomar en cuenta procesos de transporte restringidos en medios heterogéneos como el compartimento fractal de la bahía, pero no son completamente equivalentes.

En la referencia [14] se construye un modelo de tres compartimentos no convencional que *generaliza a y es compatible con* ambos enfoques: fraccionario y fractal. La Figura 12 presenta un esquema del nuevo modelo:

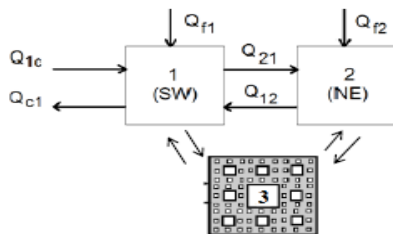


Figura 12. Modelo de tres compartimentos, uno de ellos fractal (el compartimento 3).

Utilizando el enfoque fractal y aplicando un método de perturbaciones se obtiene la solución aproximada, válida para la última etapa del proceso de desaparición del trazador, [14]:

$$A_R(t) \approx \left\{ \frac{\left( 1 - \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^t k(u) \cdot du \right) \cdot e^{-\lambda_R t} + \varepsilon_F \cdot \left( \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^{+\infty} k(u) \cdot e^{-\lambda_R u} \cdot du \right) \cdot \left( \frac{k(t)}{k(0)} \right) \cdot e^{-\frac{1}{V_F} \int_0^t k(u) \cdot du}}{1 + \varepsilon_F \cdot \left( \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^{+\infty} k(u) \cdot e^{-\lambda_R u} \cdot du \right)} \right\} \cdot A_R(0) \quad (13 a)$$

$$A_F(t) \approx \left\{ \left( \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^t k(u) \cdot e^{-\lambda_R u} \cdot du \right) - \left( \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^{+\infty} k(u) \cdot e^{-\lambda_R u} \cdot du \right) \cdot \left( 1 - e^{-\int_0^t k(u) \cdot du} \right) \right\} \cdot A_R(0) \quad (13 b)$$

En la ecuación (13 a)  $A_R(t)$  es la suma de las actividades de tritio en los compartimentos NE y S que forman un compartimento combinado R. Los volúmenes de los compartimentos fractal F y NE+SW combinados se representan por  $V_F$  y  $V_R$  respectivamente. El parámetro positivo sin dimensiones  $\varepsilon_F = \frac{k(0)}{V_F \cdot \lambda_R}$  se asume es pequeño respecto de 1.

En la ecuación (13 b)  $A_F(t)$  es la actividad de tritio en el compartimento fractal F. En ambas ecuaciones (13),  $A_R(0)$  viene dada por la fórmula (9). Por definición:  $\lambda_R = |\lambda_1|$

La actividad total de tritio se obtiene sumando ambas ecuaciones miembro a miembro.

En la primera etapa del proceso de desaparición del trazador (que se produce al unísono en ambos compartimentos homogéneos, NE y SW)  $A_R(t)$  viene disminuyendo y es mayor que  $A_F(t)$  en al menos un orden de magnitud. A su vez  $A_F(t)$  viene aumentando a partir de cero.

El flujo de THO se dirige desde R hacia F. Esto se representa por el término proporcional a  $\left( 1 - \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^t k(u) \cdot du \right) \cdot e^{-\lambda_R t}$  en (13 a). La actividad en R disminuye más rápido que  $e^{-\lambda_R t}$  porque al eflujo de THO hacia las aguas costeras (supuestamente sin reflujos) se añade un eflujo neto de THO hacia el compartimento fractal.

El factor  $1 - \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^t k(u) \cdot du$  termina por anularse y luego se hace negativo. Entonces

$\left( 1 - \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^t k(u) \cdot du \right) \cdot e^{-\lambda_R t}$  pasa por un valor mínimo negativo, que cabe esperar sea muy pequeño en valor absoluto respecto de  $A_R(0)$ , y luego tiende a cero por valores negativos muy pequeños respecto de los valores que toma durante la etapa inicial. El otro término, siempre positivo, que aparece en el numerador de (13 a), pasa a ser dominante. Se invierte el sentido del flujo entre F y R, que ahora se dirige desde F hacia R. En esta última eta-

pa  $\frac{A_F(t)}{V_F}$  es mayor que  $\frac{A_R(t)}{V_R}$ , pero esas concentraciones promedio de actividad se mantienen del mismo orden de magnitud durante el resto del proceso. Cuando  $t \rightarrow +\infty$  la influencia de  $\left(1 - \frac{1}{V_R} \cdot \int_0^t k(u) \cdot du\right) \cdot e^{-\lambda_R \cdot t}$  sobre la evolución de  $A_R(t)$  se hace despreciable.

Ambas actividades,  $A_R(t)$  y  $A_F(t)$  se desvanecen al unísono, al igual que la actividad

$$\text{total } A(t), \text{ así: } k(t) \cdot e^{-\left(\frac{1}{V_F}\right) \cdot \int_0^t k(u) \cdot du} = \frac{d}{dt} e^{-\left(\frac{1}{V_F}\right) \cdot \int_0^t k(u) \cdot du} \quad (14)$$

De la fórmula (10) para la función de densidad de probabilidad  $f_{\hat{T}}(t)$  para el tiempo aleatorio de residencia de una partícula de THO en la bahía y de la fórmula (14) se desprende que para  $t \rightarrow +\infty$ :

$$f_{\hat{T}}(t) \propto e^{-\left(\frac{1}{V_F}\right) \cdot \int_0^t k(u) \cdot du} \quad (15)$$

Si el coeficiente cinético que caracteriza el transporte hacia y desde el compartimento fractal (F) sigue una ley potencial  $k(t) = k_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-p}$  ( $0 < p < 1$ ) se desprende la siguiente relación asintótica durante la última etapa de la desaparición del trazador:

$$\log_e A_R(t) \approx (\text{const}) - p \cdot \log_e \left(\frac{t}{T}\right) - \frac{\left(\frac{k_0}{V_F}\right) \cdot T}{(1-p)} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{1-p} \quad 0 < p < 1 \quad (16)$$

En este caso la densidad de probabilidad de residencia tiende asintóticamente a cero como

$$\text{una exponencial dilatada: } f_{\hat{T}}(t) \propto e^{-\frac{k_0 \cdot T}{V_F \cdot (1-p)} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{1-p}} \quad 0 < p < 1 \quad (17)$$

En la Figura 13 se resumen todas las etapas del proceso de desaparición de THO en una curva ajustada a los datos experimentales disponibles [14].

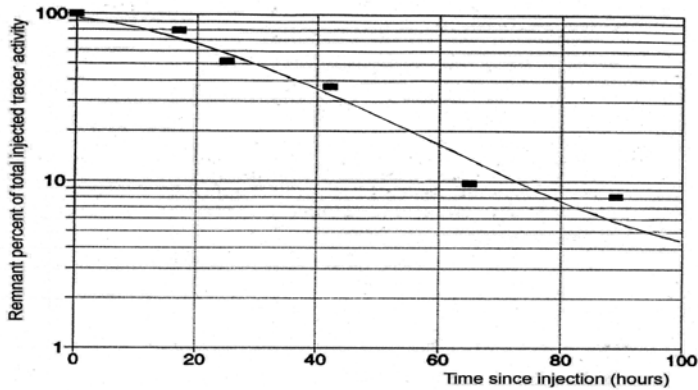


Figura 13. Gráfico logarítmico de la actividad de tritio en la bahía (valores porcentuales) en función del tiempo (en horas, con cero correspondiendo al la inyección del trazador). Se ve la gráfica de una curva regular que se ajustó a las actividades medidas.

Durante la última etapa de desaparición del trazador  $\frac{d^2}{dt^2} \log_e A_R(t) > 0$ , a diferencia de lo que acontece en la primera etapa, durante la cual  $\frac{d^2}{dt^2} \log_e A_R(t) < 0$ . Recordemos que la actividad total  $A(t)$  en el modelo con dos compartimentos clásicos corresponde a la actividad  $A_R(t)$  en el modelo fractal que describe la totalidad del proceso.

Como podía esperarse, el tiempo de renovación correspondiente al modelo de tres compartimentos resulta mayor que el tiempo de renovación estimado con el modelo convencional de dos compartimentos, debido al efecto de trampa que el compartimento fractal ejerce sobre las moléculas de THO [14]. No obstante, el aumento es significativo pero no tan grande como el que se produce al pasar del modelo de un compartimento homogéneo al modelo de dos compartimentos homogéneos. Esto se debe a que el efecto de trampa comienza a dominar la cinética cuando la mayor parte del trazador ya ha abandonado la bahía.

### Efectos de estratificación y de escala sobre los procesos de transporte de masa en aguas costeras

Una vez que sale el agua contaminada de la bahía entre las escolleras Oeste y Sarandí, en la época estival encuentra un cuerpo de agua estratificado. Los resultados experimentales indican que la mayor parte del agua circula por la capa superior, por encima de la pycnoclina.

Lo contrario ocurre con las aguas residuales descargadas por el emisor de Punta Brava, que viajan por debajo de la picnóclina.

El gradiente vertical en la velocidad horizontal a través de la picnóclina tiende a aumentar el transporte turbulento en dirección vertical. Desde el punto de vista cuantitativo este aumento se puede resumir estimando una frecuencia de Kelvin-Helmholtz que se calcula a partir de las variaciones verticales de las componentes  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  del promedio de la velo-

cidad horizontal: 
$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}$$

La variación brusca de densidad  $\rho$  a través de la picnóclina tiende a disminuir el transporte turbulento. Esta disminución puede resumirse estimando una frecuencia de Brünt-Väisälä  $M = \sqrt{-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)}$  (el eje z está dirigido desde el fondo hacia la superficie).

A partir de las mediciones en las aguas costeras de la región de Punta Brava se pueden hallar valores numéricos aproximados para esas frecuencias en tres regiones: en la capa superior, en la capa inferior y en la picnóclina. Los efectos combinados de ambos procesos contrapuestos se pueden resumir un número de Richardson local:  $Ri(z) = \frac{M^2(z)}{N^2(z)}$

Es posible establecer correlaciones (de Mamayev, de Munk y Anderson, etc. [15]) entre los promedios, tomados sobre un ciclo de marea, del número de Richardson y del coeficiente de difusión turbulenta vertical  $\bar{\varepsilon}_z(z)$ . A partir de esas correlaciones se puede estimar, para los escenarios estudiados, que el valor promedio del coeficiente de difusión turbulenta vertical puede disminuir en la interfase (picnóclina) hasta un 80 % de sus valores en cada una de las capas [5]. En consecuencia la interfase opera como un verdadero techo difusivo para el transporte turbulento vertical en la capa inferior (aguas descargadas por el emisario) y como un piso difusivo para dicho transporte en la capa superior (aguas inyectadas desde la bahía cuando la carrera de marea se dirige hacia el Este). Los resultados experimentales relacionados con el transporte de uranina confirman esta conclusión.

Las primeras etapas de dispersión del trazador, inyectado puntualmente en la capa de agua que se encuentra por encima de la picnóclina, se puede describir en una primera aproximación, mediante una ecuación aplicable a la concentración  $\bar{c}(t, x, y)$  de trazador promediada sobre la dimensión vertical de esa capa. Si se supone que el proceso de dispersión presenta isotropía horizontal se puede utilizar la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(t, r) \approx \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot E_h(t, r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \bar{c}(t, r) \right) \quad (18)$$

El coeficiente de dispersión horizontal  $E_h(t, r)$  que aparece en (19) se suele representar así [15]:

$$E_h(t, r) \approx \alpha(t) \cdot r^q \tag{19}$$

El punto correspondiente a  $r = 0$  se desplaza arrastrado por el movimiento del agua, de modo que se trata de un sistema de coordenadas móvil.

Si se inyecta una masa  $M$  de trazador en  $r = 0$  cuando  $t = 0$ , en una capa de aguas costeras de espesor  $h_c$ , la solución de la ecuación del transporte (18) con el coeficiente de dispersión dado por (20) es (siendo  $\Gamma(z)$  la función gama de Euler [16]):

$$\bar{c}(t, r) = \frac{M}{h_c} \cdot \frac{(2-q)}{2\pi \cdot \Gamma\left(\frac{2}{2-q}\right)} \cdot (\sigma(t))^{2-q} \cdot \exp[-\sigma(t) \cdot r^{2-q}] \tag{20}$$

En (20) se tiene, por definición:

$$\sigma(t) = \frac{1}{(2-q)^2 \cdot \int_0^t \alpha(t') \cdot dt'} \tag{21}$$

Cuando  $q = 0$  y  $\alpha(t) = E_{h,0}$  es constante, se obtiene un proceso de dispersión gaussiano.

Cuando  $q = 1$  y  $\alpha(t) = P$  es constante, se obtiene el modelo de Joseph y Sedner que se utilizó para la dosificación del trazador fluorescente en los experimentos en aguas costeras.

Las manchas de trazador adoptan formas alargadas e irregulares. Una interpretación posible del modelo de mancha con simetría cilíndrica es que describe valores medios sobre un conjunto estadístico (un ensemble) de manchas.

Para aplicar (20) en la práctica se determinan curvas horizontales de iso-concentración, se calcula el área encerrada por cada una de ellas, se construyen círculos de igual área y se asignan los valores de concentración a los radios de los correspondientes círculos.

Una vez que la extensión de la mancha es lo suficientemente grande, la dispersión se puede describir como un proceso gaussiano, en principio anisótropo. Si  $v$  es la velocidad horizontal del agua (dirigida paralelamente al eje  $x$  y supuesta constante en toda la región considerada) y si los coeficientes de dispersión longitudinal (en dirección paralela al movimiento advectivo) y transversal son  $K_L$  y  $K_T$  respectivamente, entonces:

$$\bar{c}(t, x, y) \approx \frac{M}{h_c} \cdot \frac{\exp\left[-\left(\frac{x-v \cdot t}{4 \cdot K_L \cdot t}\right)^2 - \left(\frac{y}{4 \cdot K_T \cdot t}\right)^2\right]}{4\pi \cdot t \cdot \sqrt{K_L \cdot K_T}} \tag{22}$$

Esta expresión puede no ser aplicable cuando en la capa de agua considerada hay flujos, superpuestos en la vertical, que presentan sentidos opuestos. En ese caso se puede utilizar

una matriz simétrica de coeficientes de dispersión cuyas direcciones principales ya no coinciden con la dirección de la velocidad local y su dirección transversal [17][18].

### **Modelo matemático para la estimación del $T_{90}$ en las aguas costeras próximas a Punta Lobos**

Generalmente se supone que la concentración bacteriana  $c_b(t)$  en un cuerpo de agua decae en función del tiempo  $t$  según la fórmula que se deduce del modelo de Phelps [19] para los ríos:  $c_b(t) = \frac{c_b(0)}{D(t)} \cdot e^{-K_b \cdot t}$  siendo  $T_{90} \cong \frac{2.3}{K_b}$  y  $D(t)$  la dilución. Un trazador con-

servativo de concentración  $c_T(t)$  permitiría medir la dilución:  $D(t) = \frac{c_T(0)}{c_T(t)}$  Entonces

ajustando los parámetros de la fórmula  $\log_e \frac{c_b(t)}{c_T(t)} \approx -K_b \cdot t + \log_e \frac{c_b(0)}{c_T(0)}$  a los datos expe-

rimentales, se hallaría el parámetro de auto-depuración  $K_b$ . Los valores que puede adoptar este parámetro dependen de los procesos que actúen eliminando los microorganismos suspendidos en el cuerpo de agua: la absorción de radiación solar y el choque osmótico.

Debido a las variaciones temporales y espaciales que presentan las aguas costeras de Montevideo, la fórmula de Phelps para estimar el  $T_{90}$  bacteriano no resulta directamente aplicable en la práctica. La tasa de dosis de radiación solar que un microorganismo va a estar recibiendo (UV y visible) depende de la profundidad a la que se encuentre, de la turbidez del agua, de la estación del año, de la cobertura de nubes y de la hora del día. Asimismo, el daño por choque osmótico depende de la distribución de salinidad en el cuerpo de agua receptor, de los cambios de posición del micro-organismo arrastrado por los movimientos del agua y de su tendencia a sedimentar.

Por estos motivos se construyó un modelo matemático analítico para describir el transporte de una población de micro-organismos en un cuerpo de agua estratificado, teniendo en cuenta procesos de advección, dispersión, sedimentación e interacciones con el fondo del estuario. Se introduce un *campo de parámetros locales de autodepuración*  $K_b(t, x, y, z)$  que depende de las coordenadas cartesianas de posición  $x, y, z$  y del tiempo  $t$ . Para un cuerpo de agua sin piso difusivo (sin una picnóclina marcada), pero con salinidad variable en profundidad, luego de introducir algunas simplificaciones ( $K_b(t, x, y, z) = K_b(z)$ ) siendo  $z$  la coordenada vertical para una columna vertical de agua de profundidad cons-

tante H), se obtiene la siguiente fórmula asintótica, donde  $c_b(t; x, y, z)$  es la concentración bacteriana y  $c_{T_h}(t; x, y, z)$  es la concentración de trazador conservativo [20]:

$$\log_e \left( \frac{\int_0^H c_b(t; x, y, z) dz}{\int_0^H c_T(t; x, y, z) dz} \right) \approx -k_{b,0}^2 \cdot t + \log_e \left( \frac{M_{o,b}}{M_{o,T}} \cdot \frac{A_{b,o}}{A_{b,T}} \right) \quad (23)$$

$$k_{o,b}^2 \approx \frac{\int_0^H K_b(z) dz}{H} + \frac{2}{t_s} \cdot \left( 1 - \frac{\tau_b}{\tau_c} \right) \quad (24)$$

El coeficiente global de auto-depuración  $k_{o,b}^2$  resulta de sumar dos términos.

El primero de esos términos es el promedio vertical del parámetro local de auto-depuración  $K_b(z)$ :

$$\frac{\int_0^H K_b(z) \cdot dz}{H}$$

En el segundo término  $\frac{2}{t_s} \cdot \left( 1 - \frac{\tau_b}{\tau_c} \right)$  aparece una escala de tiempo  $t_s = \frac{H}{w_s}$  característica del proceso de sedimentación de los microorganismos ( $w_s$  es una velocidad de sedimentación promedio) y el cociente  $\frac{\tau_b}{\tau_c}$  entre el esfuerzo de cizalla  $\tau_b$  sobre el fondo del

estuario y un valor crítico  $\tau_c$  de ese esfuerzo, por encima del cual la erosión con re-suspensión se impone al depósito por sedimentación.

Si hay un piso difusivo la integración se lleva a cabo entre la superficie del cuerpo de agua y la cota  $h$  de la picnóclina (medida a partir de la superficie). En este caso  $t_s = \frac{h}{w_s}$  y

se anula el cociente  $\frac{\tau_b}{\tau_c}$  relacionado con procesos mecánicos que se producen en el fondo del estuario.

Según este modelo, lo que se puede determinar como una estimación de la capacidad de auto-depuración a partir de los datos experimentales, es el parámetro global  $k_{o,b}^2$  que comprende dos términos: uno de ellos mide la autodepuración propiamente dicha y el otro mide la desaparición o reaparición (según sea  $\tau_b$  menor o mayor que  $\tau_c$ ) de microorganismos en suspensión. Este parámetro **permite definir un  $T_{90}$  equivalente** así:

$$T_{90} = \frac{2.3}{k_{o,b}^2}$$

**CONCLUSIONES :**

(1) Como consecuencia del brusco aumento en la conductividad (y por tanto de la densidad) del agua existente en la zona del emisor de Punta Brava cuando se alcanza una determinada profundidad, durante los meses abarcados por la campaña (verano-otoño temprano) las aguas residuales vertidas a través del mismo son atrapadas a niveles profundos, entre los 3.6 metros (primera detección de la pluma) y los 5.2 metros (quinta detección de la pluma). En consecuencia, las playas con una profundidad menor a 3 metros deben estar poco expuestas a contaminación proveniente de los caudales descargados a través del emisor: la mayor parte de las aguas residuales escapan de la zona de playas a través de flujos más profundos. Se comprobó que el emisor sub-acuático operaba de acuerdo a lo esperado en las condiciones prevalecientes en el momento del estudio (las usuales en la temporada estival) y no sería el principal responsable de la contaminación residual de las playas.

(2) La estimación de los parámetros del nuevo modelo, aplicando un criterio de ajuste óptimo a los datos experimentales, presenta una considerable incertidumbre debido a que las incertidumbres asociadas a los datos posteriores a las 100 horas a partir de la inyección no hace aconsejable utilizarlos en la estimación de parámetros y a que los datos disponibles en las primeras 100 horas son relativamente escasos en relación con el número de parámetros a estimar.

(3) De acuerdo con el modelo con un compartimento fractal, la actividad sumada de los compartimentos NE y SW, que es lo que se estima a partir de las concentraciones de actividad de tritio medidas en los puntos medios de cada celda, disminuye menos que exponencialmente en función del tiempo. Esta consecuencia del modelo, independiente de la incertidumbre en los valores de los parámetros mencionada, suministra una explicación posible para las observaciones sobre el comportamiento de la actividad total en la bahía durante el período de tiempo comprendido entre 70 y 100 horas de mediciones.

(4) La bahía opera como una bomba de descarga intermitente de contaminantes a las aguas costeras de Montevideo. De la estimación de los tiempos de transporte de los contaminantes presentes en las aguas costeras provenientes de la bahía (microbiológicos o químicos), se desprende que en un lapso no mayor a cuatro días, un agente vertido en las dársenas del Puerto de Montevideo alcanza las aguas de la Playa Carrasco. En el caso del vibrión colérico, en las condiciones de temperatura y salinidad usuales en la temporada estival, cabe esperar una sobre vida promedio de más de cinco días. Debido a casos como éste, podría ser necesario tomar medidas sobre el uso de las playas en caso de producirse un accidente de contaminación en el puerto.

Si bien cabe esperar que el incremento en el tiempo promedio de renovación del agua en la bahía cuando se pasa del modelo de dos compartimentos clásico al modelo fractal no

sea muy importante, hay una diferencia importante relacionada con la expresión asintótica de la función de densidad de distribución de la probabilidad correspondiente al tiempo aleatorio de residencia de una partícula: mientras que en el modelo de compartimentos clásico es una función exponencial del tiempo, en el modelo fractal es una exponencial dilatada, que tiende a cero más lentamente. Esto puede tener como consecuencia el incremento en la extensión de la ventana de tiempo asociada a un accidente de contaminación.

(5) El proceso de advección-dispersión del trazador, que simula el transporte de un contaminante vertido accidentalmente en forma súbita y localizada en una región con efecto de trampa, presenta efectos de histéresis y de escala significativos durante la primera hora y media. Luego se puede aplicar un modelo matemático de dispersión gaussiana integrado en profundidad. La matriz de coeficientes de dispersión diagonalizada presenta un coeficiente que toma valores del orden de  $1 \frac{m^2}{s}$  y el otro coeficiente toma valores de un orden veinte veces menor. Esta matriz emerge de una estructura de corrientes compleja, que puede presentar inversión de flujos en profundidad, cuando se considera una dirección ortogonal a la línea de la costa, bajo la acción de vientos fuertes y frecuentes provenientes del S, SE o SW. En este caso los ejes principales de la matriz de dispersión no necesariamente coinciden con las direcciones determinadas a partir de la dirección promedio del movimiento advectivo. Las direcciones de los ejes principales pueden cambiar de un punto a otro del cuerpo de agua, si bien de forma continua y en escalas espaciales relativamente grandes. Todo esto debe tenerse en cuenta si se va a utilizar un modelo analítico de pronóstico, como es el caso de las estimaciones efectuadas con fines de protección radiológica.

(6) El concepto de  $T_{90}$ , en su acepción original, debe ser refinado considerablemente y complementado por otros parámetros para obtener una medida de la capacidad de autodepuración aplicable a un cuerpo de agua con una dinámica tan compleja como el estudiado. En principio se podrían estimar unos pocos coeficientes cinéticos adicionales, a partir del ajuste de los parámetros del modelo matemático presentado en la referencia [20], a los datos obtenidos en los trabajos de campo. Para ello se deben utilizar las fases iniciales de los transitorios en la cinética de las concentraciones bacterianas y del trazador conservativo.

### **Referencias bibliográficas**

1. Suárez Antola R. Estudios con trazadores en las aguas costeras del Departamento de Montevideo, Actas de Trabajos Completos E-ICES 8, CNEA, Buenos Aires, 2013.
2. Plata Bedmar A, Suárez Antola R y otros. Circulación y renovación del agua en la Bahía de Montevideo. Informe técnico URU/8/007 N1, OIEA, Viena, 1992.

3. Plata Bedmar A, Suárez Antola R y otros. Estudio de la Contaminación Costera de la zona de Montevideo mediante Técnicas de trazadores. Informe técnico URU/8/007 N2, OIEA, Viena, 1993.
4. Suárez Antola R, Crossignani L y otros. Estudio experimental mediante trazadores de los contaminantes vertidos por la Bahía de Montevideo en las playas del Este de la ciudad. Anales del XXIV Congreso Interamericano de Ingeniería Sanitaria y Ambiental, Buenos Aires, 1994.
5. Suárez Antola R, Malek A y otros. Los parámetros de la dispersión en las aguas costeras del Departamento de Montevideo. Parte 1. Fundamentos y descripción de la técnica experimental. Informe Técnico URU/8/009 N1, Montevideo, 1995.
6. Suárez Antola R. Fluorescent tracers, scale effects and applications of fractal geometry in the coastal waters of Río de la Plata. Presentación sobre Avances en Tecnología de Trazadores, Centro Nuclear de Saclay, CEA, Saclay, 1999.
7. Vianna Bandeira J, Goudiño Pinto C y otros. Study of the environmental quality of the Bay of Montevideo, Informe Técnico URU/8/009 N2, Viena, 1998.
8. Suarez Antola R y Luchinni L. Informe final sobre la determinación del  $T_{90}$  en las aguas costeras de la región de Punta Lobos. Informe técnico para la Intendencia Municipal de Montevideo, 2001.
9. Edens J. Some applications of radioisotopes in coastal pollution control. OIEA Peaceful Uses of Atomic Energy, 14, Viena, 1972.
10. Suárez Antola R. Water renewal in Montevideo's Bay: a two compartments model for tritium kinetics, Proceedings of the International Nuclear Atlantic Conference, Recife, Brasil, 2013.
11. Verotta, D. Fractional kinetics compartments models. En Capri, A. (Ed.) Progress in Molecular and Environmental Engineering. INTECH, Rijeka, 2011.
12. Pereira, L. Fractal pharmacokinetics. Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2010; 11(2): 161-184.
13. Suárez Antola R. Water Renewal in Montevideo's Bay II: A Compartmental Fractional Model for Tritium Kinetics. International Conference on Applications of Radiation Science and Technology, Viena, 2017.
14. Suárez Antola R. Water renewal in Montevideo's Bay: A three compartments model for tritium kinetics. Enviado a Nukleonika para su publicación, 2017.
15. Nihoul J. Modelling of marine systems. Elsevier, Amsterdam, 1975.
16. Abramowitz M y Stegun, I. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Washington DC, 1964.
17. Fischer H. On the tensor form of the bulk dispersion coefficient in a bounded skewed shear flow. *J. Geophys. Res.* 1978; **83** (1): 2373-2375.
18. Suárez Antola R. Algunos modelos analíticos de diagnóstico para procesos de transporte en estuarios y aguas costeras, DINATEN, Montevideo, 2001.
19. Tchobanoglous G y Burton F. Metcalf & Eddy Wastwater engineering. Mc-Graw Hill, Nueva York, 1991.
20. Suárez Antola R. A mathematical model for the design and interpretation of experiments intended to measure the  $T_{90}$  in estuarine coastal waters, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Tracers and Tracer Applications. CEA, Autrans, 2006.